Klaster Cebirlerinin Mütasyon Sınıfları

Proje No: 113F138

Program Kodu: 1001

Proje Yürütücüsü:
Doç.Dr. Ahmet İrfan Seven

KASIM 2016
ANKARA

ÖNSÖZ

TÜBİTAK tarafından desteklenen 113F138 numaralı ve “Klaster cebirlerinin mütasyon sınıfları” başlıklı bu matematik projesi 2013-2016 yılları arasında Doç.Dr.Ahmet İrfan Seven tarafından Orta Doğu Teknik Üniversitesi’nde yürütülmüştür. Proje’de klaster cebirlerinin mütasyon sınıflarının cebirsel ve kombinatoryal özellikleri belirlenmiştir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Klaster cebirleri (cluster algebras) önce matematiğin klasik bir alanı olan temsil teorisinde ortaya çıkmış ve daha sonra varlığı diğer farklı alanlarda da farkedilmiş bir matematiksel yapıdır. Bu projede, klaster cebirlerini belirleyen mütasyon sınıflarının temel cebirsel-kombinatoryal özellikleri ortaya çıkarılmıştır. Bu kapsamda, matematiğin temel objelerinden olan Kac-Moody Lie cebirlerine karşılık gelen klaster cebirleri ile çeşitli sonlu mütasyon tipine sahip klaster cebirleri için mütasyon değişmezleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, bu konular arasında yeni bağlantılar ortaya çıkarmış ve daha iyi anlaşılmalarına katkıda bulunmuştur. Projede elde edilen sonuç ve araçlar klaster cebirleri ile ilgili açık hesaplamalar yapmaya imkan vermektedir. Bu yönüyle proje, klaster cebirleri teorisinde önemli bir boşluğu doldurmuştur. Projede elde edilen sonuçlar dört makale olarak yazılmış ve çeşitli uluslararası bilimsel toplantılarda sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Klaster cebiri, mütasyon

ABSTRACT

Cluster algebras first appeared in representation theory, which is a classical area of mathematics. It has been observed that these algebras are also related to many different areas of mathematics. In this project, fundamental combinatorial properties of the cluster algebras which correspond to Kac-Moody Lie algebras and of some cluster algebras of finite mutation type have been established. The results of the project allow one to do explicit computations, which are needed very much in the theory of cluster algebras. The results of the project have been written as four research articles and presented in various international conferences.

Keywords: Cluster algebra, mutation

1. GİRİŞ

Temsil teorisi matematiğin klasik bir alanı olup evrendeki çeşitli fiziksel ve biyolojik sistemlerin simetri özelliklerini matematiksel olarak çalışmak icin kullanılmaktadır. Bu teorinin en temel problemlerinden birisi, G. Lusztig tarafından geometrik olarak tanımlanmış olan, basit cebirsel gruplar ve temsilleri üzerindeki kanonik bazların somut olarak kurulmasıdır. Bu problemin çözümü için son yıllardaki en önemli gelişme, projenin konusu olan, klaster cebirleridir (cluster algebras) (Fomin ve Zelevinsky, 2003). Bu cebirler bir çeşit komutatif cebirlerdir; "klaster" (cluster) terimi, bu cebirleri üreten bir takım "klaster degişkenleri" nin, birbirinden ayrık olmak zorunda olmayan, ve eşit sayıda eleman içeren gruplara (klaster) ayrılmış olmasından dolayı kullanılmıştır. Klasterler özel bir çeşit rasyonel dönüşümle birbirlerine bağlıdırlar. Bu yapısıyla klaster cebirleri, kanonik bazları somut olarak kurmak ve çalışmak için doğal bir ortam sağlamaktadır. Ayrica bu cebirlerin matematiğin, Kac-Moody Lie cebirleri, Teichmüller teori, integre edilebilir sistemler gibi diğer temel konuları ile yakın bir şekilde bağlantılı olduğu gözlemlenmiştir.

Klaster cebirleri teorisinin en temel problemlerden biri, her cebir teorisinde olduğu gibi, sınıflandırma problemidir. Ancak klaster cebirlerinin sınıflandırılmasında, soyut cebirlerin sınıflandırılmasında kullanılan, izomorfizma denkliği yeterli olmamakta, yukarıda belirtilen klaster yapısının da korunması gerekmektedir. Bu yapıyı koruyan denkliğe "mütasyon denkliği" denilmektedir. Klaster cebirlerinin bu mütasyon denkliği altında sınıflandırılması ve bir klaster cebirinin mütasyon denklik sınıfının kendisinin açık bir şekilde belirlenmesi temel problemlerdir. Projede temel olarak, klaster cebirlerinin mütasyon denklik sınıflarını belirleyen, dolayısıyla bu cebirleri sınıflandıran, özellikler ortaya çıkarılmıştır.

Çoğu cebir teorilerinde olduğu gibi, klaster cebirlerinin de hepsini sınıflandırmak mümkün görülmemektedir. Dolayısıyla projede, belli temel özelliklere sahip ve matematiğin diğer alanlarında yaygın bir şekilde kullanılan klaster cebirleri çalışılmıştır. Bu kapsamda, projede, "temel katsayılı klaster cebirleri" (cluster algebras with principle coefficients); Kac-Moody Lie cebirlerine karşılık gelen (acyclic) klaster cebirleri, torus yüzeyinin üçgenlemelerine karşılık gelen klaster cebirleri ve sonlu mütasyon tipine sahip klaster cebirleri için temel cebirsel ve kombinatoryal mütasyon değişmezi özellikler belirlenmiştir.

Projede, klaster cebirlerine ait mütasyon değişmezleri bulmak için bu cebirlerin şu özelliği kullanılmıştır: klasterler arasındaki her bir dönüşüm, bir tamsayı matrisi ile kodlanabilmekte ve "mütasyon" bu matrisler üzerinde özel bir dönüşüm olarak görülebilmektedir; bu matrislerin mütasyon (denklik) sınıfları bu klaster cebirlerinin mütasyon sınıflarını belirlemektedir . Klaster cebirlerinin bu özelliği matematiğin bir diğer temel konusu olan Kac-Moody Lie cebirlerinin Cartan matrisleri tarafından belirlenmesine benzemektedir. Sonuç olarak, bir klaster cebirinin mütasyon sınıfı bir matrisin mütasyon sınıfı olarak görülebilir. Projede klaster cebirlerinin mütasyon sınıfları, onlara karşılık gelen bu matris mütasyon sınıflarının temel özellikleri ortaya çıkarılarak çalışılmıştır. Projede elde edilen sonuçlar dört makale (Seven, 2014, 2016; Mazı ve Seven, 2016; Seven ve Velioğlu, 2016) olarak yazılmıştır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Projenin çalışma konusu olan klaster cebirleri cebirsel grup temsillerindeki kanonik bazları çalışmak için cebirsel/kombinatoryal bir ortam sağlamak amacıyla Fomin-Zelevinsky tarafından tanımlanmıştır (Fomin ve Zelevinsky, 2002). Aynı matematikçiler bu cebirler için temel yapı teorisi de kurmuşlardır (Fomin ve Zelevinsky, 2002; 2003; 2007). Bu bağlamda temel katsayılı klaster cebirleri tanımlanmıştır (Fomin ve Zelevinsky, 2007); bu cebirler bir çeşit evrensellik özelliğine sahiptirler; bunlar için elde edilen sonuçlar diğer klaster cebirlerine transfer edilebilmektedir. Proje kapsamında bu cebirlerin matris mütasyon sınıflarının cebirsel ve kombinatoryal özellikleri ortaya çıkarılmıştır.

Klaster cebirleri tanımlandıktan sonra bu cebirleri çalışmak için en temel fikir klaster değişkenlerini ve klasterlerini, vektörler veya çeşitli kategorilerin objeleriyle, parametrize etmek olmuştur. Bu parametrizasyon fikri kapsamında temel bir yaklaşım klaster yapısını sonlu tip Kac-Moody Lie cebirlerinin kök sistemlerinde elde etmek olmuştur (Fomin ve Zelevinsky, 2003). Daha sonra bu yaklaşım döngüsüz klaster cebirlerinin temel katsayılarına uygulanmış, ve bu katsayıları parametrize eden c-vektörlerinin kök sistemlerine ait kökler olduğu gösterilmiştir; bu özelliğe denk bir karakterizasyon ve diğer özellikler proje yürütücüsü tarafından elde edilmiştir (Seven, 2015). Bu köklere ait yansımaların (reflection) özelliklerinin araştırılması doğal bir problemdir. Proje kapsamında, klaster teorisi ile bağlantılı olarak, bu yansımaların sağladığı yeni bağıntılar ortaya çıkarılmıştır (Bölüm 4.1).

Klaster cebirlerinin matematiksel fizikte önemli uygulamaları vardır: Yukarıda belirtilen ve projede çalışılan c-vektörleri bir BPS parçacığının spektrumunu hesaplamak için bir metod vermektedir (Cecotti vd., 2013). Proje kapsamında bu metodla ilgili temel bir problem çözülmüştür (Bölüm 4.2).

Klaster cebirlerinde parametrizasyon fikri kapsamında topolojik yüzeylerin üçgenlemelerine karşılık gelen klaster cebirleri olduğu tesbit edilmiş ve buna bağlı olarak Teichmüller teorisinde cebirsel-geometrik metodların uygulanması programı başlatılmıştır (Fomin vd., 2008). Projede, yukarıda belirtilen kök sistemleri metodu torus yüzeyinin üçgenlemelerine karşılık gelen klaster cebirlerine uygulanmış ve bu cebirler için temel mütasyon değişmezleri elde edilmiştir (Bölüm 4.3).

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Projede kullanılan temel bir metod mütasyon operasyonunun bazlar üzerindeki etkisini kullanmak olmuştur. Bunun için bir klaster cebirinin mütasyon sınıfındaki matrisler tamsayılar üzerine tanımlanan bir bilineer bir formun çeşitli bazlara göre Gram matrisleri olarak görülmüştür. Bu bazlar farklı şekillerde seçilebilir; proje için en uygun bazlar olarak “c-vektör” bazları kullanılmıştır; bu bazlar klaster cebirlerindeki temel katsayıları parametrize etmektedir. Projede bu bazların mütasyon operasyonu ile bağlantılı cebirsel, kombinatoryal ve geometrik özellikleri ortaya çıkarılmıştır.

Projede kullanılan diğer bir temel metod da mütasyon operasyonunun yansıma grupları (Weyl grupları) üzerindeki etkisini kullanmak olmuştur. Klaster teorisinin temel sonuçlarından biri döngüsüz klaster cebirlerine ait yukarıda belirtilen c-vektörlerinin bir kök sisteminin kökleri olduğudur. Buna göre her bir c-vektörüne ait bir yansıma vardır; projede bu yansımaların sağladıkları bir takım özel bağıntılar belirtilen vektörlerin geometrik özellikleri kullanılarak ortaya çıkarılmıştır (Seven, 2016).

Projede kullanılan temel metodlardan biri de mütasyon operasyonunu graflar üzerinde tanımlı bir operasyon olarak görerek bu operasyonu graflar üzerinde tanımlanmış fonksiyonlara genelleştirmek olmuştur. Döngüsüz (acyclic) klaster cebirleri için, bu genelleştirme proje yürütücüsü tarafından elde edilmişti (Seven, 2015). Bu projede de torus yüzeyinin üçgenlemelerine karşılık gelen klaster cebirlerinin kombinatoryal içerikli “admissible quasi-Cartan companion” fonksiyonlarına sahip oldukları gösterilmiştir (Seven ve Velioğlu, 2016); bu fonksiyonlar Cartan matrislerini genelleştiren bir çeşit simetrize matrisler olarak da görülebilir. Bu özellik klaster cebirleri için çok kuvvetli bir kombinatoryal özelliktir.

Projede kullanılan diğer bir temel metod da mütasyon operasyonu ile antisimetrik tamsayı matrislerin lineer-cebirsel özellikleri arasındaki ilişkinin ortaya çıkarılması olmuştur. Bu bağlamda temel katsayılı klaster cebirlerine karşılık gelen antisimetrik matrisler denklik (congruence) bağıntısı altında sınıflandırılmış ve Arf değişmezleri hesaplanmıştır (Mazı ve Seven, 2016).

4. BULGULAR

Projede elde edilen temel sonuçlar dört kısımda özetlenebilir:

4.1 Klaster cebirlerinden gelen yansıma grup bağıntıları

Projenin bu kısmında yansıma gruplarında klaster cebirlerinden gelen bağıntılar elde edilmiştir.

(Bu kısımda elde edilen sonuçlar “Seven, 2016” no’lu makale olarak yazılmış ve yayınlanmıştır. Makale bu raporun eklerinde bulunmaktadır.)

Projenin bu kısmında, her bir döngüsüz klaster cebirinin matris mütasyon sınıfına karşılık doğal bir yansıma grubu tanımlanmış ve bu gruplarda özel bağıntılar ortaya çıkarılmıştır. Şimdi yapılan bu çalışmaları açıklamaya çalışalım:

Projenin başlığında geçen klaster cebirleri bir tamsayı matrisinden oluşan bir veri topluluğuna bağlı olarak tanımlanmaktadır. Daha açık ifade etmek için aşağıdaki tanımı alalım:

Tanım 1: B nxn boyutlu bir tamsayı matrisi olsun. Eğer köşegen elemanları pozitif olan bir D köşegen matrisi için DB antisimetrik ise B’ye “antisimetrize edilebilir” diyoruz (Fomin ve Zelevinsky, 2002). (Özelde her antisimetrik matris antisimetrize edilebilir bir matristir, bunun için D’yi birim matris almak yeterlidir.)

Bu matrisleri daha rahat kullanmak amacıyla aşağıdaki şekilde yönlü bir grafla temsil edebiliriz:

Tanım 2: B bir antisimetrize edilebilir matris olsun. Buna bağlı olarak G(B) şu şekilde tanımlanan yönlü grafı göstersin: G(B)’nin köşeleri B matrisinin indeksleri olan 1,2,...,n; i den j’ye yönlü bir kenar ancak ve ancak $B_{i,j}>0$ ise bulunur ve bu kenara $B_{i,j}B_{j,i}$ ağırlığı verilir (Fomin ve Zelevinsky, 2004).

Kolayca görüleceği gibi bu tanımla antisimetrik tamsayı matrisleri yönlü graflarla birebir bir şekilde temsil edilebilir; ancak bazı antisimetrik olmayan farklı antisimetrize matrisleri temsil eden graflar aynı olabilir.

Klaster teorisinde antisimetrize edilebilir matrisler mütasyon denen temel bir operasyonla beraber kullanılmaktadır. Şimdi bu operasyonu hatırlatalım:

Tanım 3: B bir antisimetrize edilebilir matris ve k herhangi bir indeksi olsun. “B’nin k daki mütasyonu”, elemanları aşağıdaki formülle belirlenen B’ matrisidir: eğer i=k veya j=k ise $B'_{i,j}=-B_{i,j}$; değilse $B'_{i,j}=B_{i,j}+sgn(B_{i,k})max\{B_{i,k}B_{k,j},0\}$. B’ matrisi de antisimetrize edilebilir bir matrisdir. Bu operasyon antisimetrize matrisleri temsil eden graflar üzerinde bir operasyon olarak da görülebilir.

Bu operasyon (k daki mütasyon) ardarda iki kere uygulanırsa birim operasyon olur (yani B’ ’nün k’daki mütasyonu B dir), dolayısıyla, mütasyon, antisimetrize edilebilir matrisler (ve grafları) üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar (Fomin ve Zelevinsky, 2004). Bu bağıntının denklik sınıflarına mütasyon sınıfları denir: yani B’nin (veya grafının) mütasyon sınıfı, B’den bir mütasyon dizisi ile elde edilebilen matrislerin topluluğudur. Bu sınıf sonlu sayıda elemanlardan oluşuyorsa B’ye (veya tanımladığı klaster cebirine) sonlu mütasyon tipli denilmektedir.

Projenin başlığında geçen klaster cebirlerinin herbiri bir antisimetrize matris ve onun mütasyon sınıfına bağlı olarak tanımlanan ve rasyonel fonksiyonlardan oluşan bir değişmeli cebirdir. Herbir antisimetrize edilebilir mütasyon sınıfı birebir bir şekilde bir klaster cebiri belirler (Fomin ve Zelevinsky, 2002). Dolayısıyla antisimetrize edilebilir matrislerin mütasyon altında sınıflandırılması klaster cebirlerinin sınıflandırılmasına denktir. Projede klaster cebirlerine bu yönden yaklaşılmaktadır. (Klaster cebirlerinin özel rasyonel fonksiyon topluluğu olarak tanımına projede ve bu raporda ihtiyaç duyulmamaktadır).

Görüldüğü gibi klaster teorisinin temel problemlerinden biri antisimetrize edilebilir matrislerin mütasyon altında sınıflandırılması ve mütasyon sınıflarının anlaşılmasıdır. Bu kolay bir iş değildir, çünkü tanımdan anlaşılacağı gibi, mütasyon lineer bir operasyon değildir, parçalı lineer bir operasyondur. Dolayısıyla lineer cebir teknikleri direkt olarak uygulanamamaktadır. Ancak yine de belli bir noktaya kadar lineer cebir uygulanabilir:

Teorem 1: B nxn boyutlu bir antisimetrize edilebilir matris, k herhangi bir indeks ve B’ de B’nin k daki mütasyonu olsun. O zaman $B'=P^TBP$ şeklinde yazılabilecek tamsayılar üzerine terslenebilir nxn boyutlu P matrisi vardır.

Dolayısıyla, B’nin mütasyon sınıfındaki matrisleri B matrisi tarafından tamsayılar üzerine tanımlanan bilineer bir formun çeşitli bazlara göre Gram matrisleri olarak görebiliriz. Ancak bu çok farklı şekillerde yapılabilir; bu bazların klaster teorisi için temel özelliklere sahip olmasi arzulanır. Bu amaca uygun bazlar tanımlanmıştır. Bunları ifade için önce aşağıdaki tanımı alalım:

Tanım 4: B nxn boyutlu bir antisimetrize edilebilir matris olsun ve **c**=(c_1,...,c_n) ise Z^n 'in bir bazı olsun. O zaman (B, **c**) ikilisine bir Y-tohumu (Y-seed) diyoruz.

Yukarıda antisimetrize matrisler için tanımlanan mütasyon operasyonunu Y-tohumlarına genişletelim:

Tanım 5: B bir antisimetrize edilebilir matris ve k herhangi bir indeks olsun. (B, **c**) ikilisi de bir Y-tohumu (Y-seed) olsun. Ayrıca **c**=(c_1,...,c_n)'yi oluşturan herbir c_i vektörünün sıfırdan farklı koordinatlarının hepsi aynı işarete sahip olsun (bu işareti sgn(c_i) ile gösteriyoruz; bu şarta işaret şartı diyoruz) . Buna bağlı olarak B' matrisi B'nin k daki mütasyonu ve **c'**=(c'_1,...,c'_n) da aşağıdaki şekilde tanımlanan baz olsun: eğer i=k ise c'_i=-c_i; değilse $c'_i=c_i+\max\{[\mathrm{sgn}(c_k)B_{k,i}],0\}c_k$.

Görüldüğü gibi Y-tohumları üzerinde mütasyon operasyonu tanımlamak için bir işaret şartı (sign condition) bulunmaktadır. Antisimetrize matrisler için tanımlanan mütasyon operasyonu için ise böyle bir şart yoktur. Klaster teorisinde arzu edilen ise matrislerle beraber **c** bazlarına da mütasyon uygulamaktır; dolayısıyla burada bu işaret şartını sağlıyan vektörlerden oluşan bazların elde edilmesi ve bunlarla çalışılması gerekmektedir. Klaster teorisinin en temel sonuçlarından birisi bu bazların elde edilmesidir:

Teorem 2: B_0 bir antisimetrize edilebilir matris ve $\mathbf{c_0}$=(e_1,...,e_n) standart baz olsun. O zaman (B_0, $\mathbf{c_0}$) tohumundan herhangi bir mütasyon dizisi ile elde edilen (B, **c**) tohumu yukarıda belirtilen işaret şartını sağlayacaktır; buradaki tohumlardaki baz vektörlerine, yani c_i'lere, B_0'a ait c-vektörleri ve **c**=(c_1,...,c_n) bazına da bir c-vektör bazı denir. B matrisi B_0 tarafından tanımlanan bilineer formun **c** bazına göre Gram matrisidir (Derksen vd., 2010).

Görüldüğü gibi bu teorem Tanım 5'te verilen formülün (B_0, $\mathbf{c_0}$) Y-tohumundan başlanıldığında her indeks dizisi için uygulanabileceğini söylemektedir. Bu şekilde elde edilen c-vektörleri klaster cebirlerindeki katsayıları parametrize etmektedir; bu katsayılar bazı monomyaller olup çok önemli özelliklere sahiptir (bu monomyallerin tanımına projede ve bu raporda ihtiyaç duyulmamaktadır). Dolayısıyla klaster teorisinin temel problemlerinden birisi bu temel bazların, yani c-vektör bazlarının temel özelliklerinin ortaya çıkarılması ve karakterize edilmesidir yani bir c-vektör bazını oluşturan vektörleri cebirsel ve kombinatoryal özellikler ile belirlemektir. Projenin amaçlarından birisi bu özellikleri belirlemektir. Bu kapsamda döngüsüz klaster cebirlerine (veya onların mütasyon sınıflarına) ait c-vektör bazları araştırılmıştır. Bu cebirler çok önemli olup Kac-Moody-Lie cebirlerine karşılık gelmektedir. Şimdi bizim çalışmamızla ilgili tanımları alalım:

Tanım 7: B bir antisimetrize edilebilir matris ve G(B) onu temsil eden yönlü graf olsun. Eğer G(B)'de hiç devir yoksa B'ye veya G(B)'ye döngüsüz antisimetrize edilebilir matris veya graf; bunun tanımladığı klaster cebirine de döngüsüz klaster cebiri diyoruz.

Döngüsüz antisimetrize edilebilir matrislere ait c-vektörlerinin hususi özellikleri vardır. Bunun için önce aşağıdaki tanımı hatırlatalım:

Tanım 8: A nxn boyutlu bir tamsayı matrisi olsun. Eğer köşegen elemanları pozitif olan bir D köşegen matrisi için C=DA simetrik olsun. Aşağıdaki şartları sağlıyan A'ya "simetrize edilebilir genelleştirilmiş Cartan matrisi" diyoruz: her i için $A_{i,i}=2$; eğer $i \neq j$ ise $A_{i,j}<=0$.

Her genelleştirilmiş Cartan matrisi bir "kök sistemi" tanımlar:

Tanım 9: A simetrize edilebilir genelleştirilmiş Cartan matrisi ve $\alpha_1,..., \alpha_n$ de Z^n'in bir bazı olsun. Her i indeksi için s_i ile baz vektörleri üzerinde $s_i(\alpha_j)= \alpha_j-A_{i,j}\alpha_i$ şeklinde tanımlanan lineer dönüşümü gösterelim; s_i'ye i indeksine ait yansıma diyoruz. Bu yansimalar, yani $s_1,...,s_n$, tarafından üretilen grup W'ya Weyl grup diyoruz. Baz vektörlerinden (yani $\alpha_1,..., \alpha_n$ 'den) W'nun etkisiyle elde edilen vektörlere reel kökler (real roots) diyoruz: yani W'daki bir w için $\alpha=w(\alpha_i)$ ise α bir reel kök oluyor; α için karşılık gelen yansima da ws_iw^{-1} olarak tanımlanır.

Şimdi döngüsüz antisimetrize edilebilir matrislere ait c-vektörlerinin en temel özelliğini ifade edebiliriz:

Teorem 3: B döngüsüz bir antisimetrize edilebilir matris ve A aşağıdaki şekilde tanımlanan matris olsun: her i için $A_{i,i}=2$; eğer $i \neq j$ ise $A_{i,j}=- |B_{i,j}|$. O zaman A bir genelleştirilmiş Cartan matrisidir ve B'ye ait c-vektörleri A matrisine ait reel köklerdir (Speyer ve Thomas, 2013).

Bu çerçevede aşağıdaki doğal problemler projede ele alınmıştır:

Problem: B_0 bir döngüsüz antisimetrize edilebilir matris ve (B, **c**) yukarıdaki Teorem 2'de elde edilen bir Y-tohumu, $t_1,...,t_n$ de $c_1,...,c_n$'e ait yansımalar olsun (burada **c**=$(c_1,...,c_n)$ bir c-vektör bazı ve Teorem 3'e göre her c_i bir reel köktür).

1) $t_1,...,t_n$ tarafından üretilen grubun belirlenmesi
2) $t_1,...,t_n$'in sağladığı bağıntıların tesbit edilmesi

Görüldüğü gibi bu problemler, projedeki amacımız olan c-vektör bazlarını anlamak için doğal bir yaklaşım vermektedir: $c_1,...,c_n$'in bir c-vektör bazı olarak bir araya gelmeleri için bunlara ait yansımaların belli bağıntılar sağlamaları beklenir ve bu bağıntılar üzerinden bu c-vektör bazlarını karakterize etmek "conceptual" bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımla bu problemlerin çözümü için projede çok temel sonuçlar elde edilmiştir ve bunlar ekteki makale olarak yazılmıştır. Şimdi bunları özetleyelim:

Problem 1) çözülerek $t_1,...,t_n$ tarafından üretilen grubun Weyl grubuna izomorf olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla bu grup bir mütasyon değişmezidir.

Problem 2) de ise sonlu tip (finite type) yansıma grupları için bilinen bağıntıları bütün yansıma grupları için genelleştiren (far reaching generalization) yeni bağıntılar elde edilmiştir. Bu kapsamda önce $t_1,...,t_n$ 'in Coxeter bağıntılarını sağladığı gösterilmiştir. Coxeter bağıntıları klasik bağıntılardır; ancak klaster teorisi için yeterli değildir. Yakın zamanda Coxeter bağıntılarını genelleştirmek amacıyla Barot ve Marsh tarafından yeni bağıntılar ortaya atılmıştır (Barot ve Marsh, 2015). Daha açık ifade etmek gerekirse, bilindiği gibi Coxeter bağıntıları Dynkin diagramlarının kenarlarına (edge) karşılık olarak tanımlanmaktadır (Dynkin diagramının köşeleri ise jeneratörlere karşılık gelmektedir) ; Barot-Marsh bağıntıları ise Dynkin diagramlarının döngülerine (cycle) karşılık olarak tanımlamıştır. Barot-Marsh bağıntıları sonsuz tipli klaster cebirleri için geçerli değildir: yani Problem 2'de belirtilen $t_1,...,t_n$ tarafından sağlanmamaktadır. Ancak proje kapsamında bu bağıntıların sonsuz tipli klaster cebirlerine genellemesi elde edilmiş ve Problem 2)'de belirtilen $t_1,...,t_n$ tarafından sağlandığı gösterilmiştir. (Barot-Marsh bağıntıları soyut olarak ortaya atılmıştır; projede ise bu bağıntılar geometrik olarak yorumlanarak genelleştirilmiştir)

Projenin bu kısmında elde edilen sonuçlar "Reflection group relations arising from cluster algebras" başlıklı bir makale olarak yazılmış ve yayınlanmıştır (Seven, 2016). Makale bu raporun eklerinde bulunabilir; detaylar için makaleye bakınız.

4.2 İstisnai sonlu mütasyon tipine sahip klaster cebirlerinin maksimal yeşil dizileri

Projenin bu kısmında “istisnai” sonlu mütasyon tipine (exceptional finite mutation type) sahip klaster cebirlerinin mütasyon sınıflarındaki maksimal yeşil diziler belirlenmiştir.

Projenin bu kısmında yapılan çalışmaları anlatmak için yukarıda (Bölüm 4.1) verilen Teorem 2’de şu özel duruma bakalım:

Tanım 6: Teorem 2’deki mütasyon dizisinde, $k_r....k_1$ gibi, indekslerin herbiri, yani her k_j, kendilerine karşılık gelen c-vektörünün (yani k_j’ninci c-vektörü) işareti pozitif olacak şekilde seçilirse bu diziye “yeşil dizi” denir; eğer bu diziyi uyguladiktan sonra elde edilen c-vektörlerinin hepsinin işareti negatif ise bu diziye “maksimal yeşil dizi” (maximal green sequence) denir. (Bunlara “yeşil” denmesinin sebebi “işaret”i bir çeşit trafik işareti olarak gören bir analojiden dolayıdır). Bu mütasyon dizisi uygulanırken elde edilen c-vektör bazlarına (yeni her j<=k için $k_j....k_1$ mütasyonlarını uyguladıktan sonra elde edilen c-vektör bazlarına) “maksimal yeşil dizi bazları” diyoruz.

Maksimal yeşil dizilerin matematiksel fizikte önemli uygulamaları vardır; bu diziler bir BPS parçacığının spektrumunu hesaplamak için bir metod vermektedir. Bu kapsamda (Cecotti vd., 2013) no’lu makalede matematiksel fizikte özel bir önemi olan sonlu mütasyon tipine sahip (yani mütasyon sınıfı sonlu olan) klaster cebirlerinin maksimal yeşil dizileri bazı istisnalar (X_6 ve X_7 tipler) ile belirlenmiştir. Projede bu istisnai tipli klaster cebirleri ele alınmış ve bu cebirlerin maksimal yeşil dizilerine sahip olmadıkları ispatlanmıştır. Bu sonuç, projede, maksimal yeşil dizilere sahip olmayan klaster cebirlerini belirleyen genel bir kriter bulunarak elde edilmiştir.

Projenin bu kısmında elde edilen sonuçlar “Maximal green sequences of exceptional finite mutation type quivers” başlıklı bir makale olarak yazılmış ve yayınlanmıştır (Seven, 2014). Makale bu raporun eklerinde bulunabilir; detaylar için makaleye bakınız.

4.3 Torus yüzeyinin üçgenlemelerinden gelen klaster cebirleri ve simetrik matrisler

Projenin bu kısmında, torus yüzeyinin üçgenlemelerine karşılık gelen klaster cebirlerinin mütasyon sınıflarındaki her bir antisimetrik matrisin uyumlu (admissible) Cartan eşleniği olduğu gösterilmiştir.

Yukarıda tanımı verilen (Tanım 7) döngüsüz klaster cebirlerinin mütasyon sınıflarını çalışmak için temel bir metod, yürütücü tarafından tanımlanmış olan uyumlu (admissible) Cartan eşlenikleridir (Seven, 2011): antisimetrize edilebilir bir B matrisinin bir Cartan eşleniği, B’nin elemanlarıyla aynı mutlak değere sahip elemanlardan oluşan simetrize edilebilir bir A matrisidir; uyumlu Cartan eşlenikleri ise elemanlarının işaretleri antisimetrik matrisin grafındaki döngülere göre seçilmiş özel bir tip eşleniklerdir. Mütasyon operasyonu bu eşleniklere de genelleştirilerek çalışılmaktadır. Bu metodla döngüsüz klaster cebirlerinin mütasyon sınıfları için çok temel sonuçlar elde edilmiştir (Seven, 2015).

Diğer yandan, döngüsüz klaster cebirlerinden başka, en önemli klaster cebirleri topolojik yüzeylerin üçgenlemelerine karşılık gelen klaster cebirleridir (Fomin vd., 2008). Bu cebirlerin de çok önemli uygulamaları vardır. Bu cebirler genel olarak döngüsüzdür ve sonlu mütasyon tipine sahiptir (yani matris mütasyon sınıfı sonlu sayıda matrisden oluşmaktadır). Projenin bu kısmında, yukarıda belirtilen Cartan eşleniği metodunun, topolojik yüzeylerden gelen klaster cebirlerine de uygulanılabileceği gösterilmiştir. Bu kapsamda, projede, torus yüzeyinin üçgenlemelerine karşılık gelen antisimetrik matrislerin ve graflarının yapısal özellikleri ortaya çıkarılarak bu matrislerin uyumlu Cartan eşleniklerine sahip oldukları ispatlanmıştır. Bu sonuç döngüsüz klaster cebirleri için bilinen temel sonuçların belirtilen döngülü klaster cebirlerine de genelleştirilebileceğini göstermektedir. Bu bağlamda, torus yüzeyinin üçgenlemelerine karşılık gelen mütasyon sınıfları için yansıma grupları tanımlanmış ve bu grupların Bolum 4.1'de belirtilen döngüsüz klaster cebirleri için elde edilmiş bağıntıları sağladıkları gösterilmiştir.

Projenin bu kısmında elde edilen sonuçlar "Cluster algebras from triangulations of the torus and symmetric matrices" başlıklı bir makale olarak yazılmıştır (Seven ve Velioğlu, 2016). Makale bu raporun eklerinde bulunabilir; detaylar için makaleye bakınız.

4.4 Temel katsayılı klaster cebirleri ve denklik (congruence) bağıntısı

Projenin bu kısmında temel katsayılı klaster cebirlerine karşılık gelen antisimetrik matrisler denklik (congruence) bağıntısı altında sınıflandırılmış ve mod 2 indirgemelerinin Arf değişmezleri hesaplanmıştır.

Bölüm 2'de belirtildiği gibi temel katsayılı klaster cebirleri (Fomin ve Zelevinsky, 2007) en temel klaster cebirleridir çünkü bu cebirler bir çeşit evrensellik özelliğine sahiptirler; bunlar için elde edilen sonuçlar diğer klaster cebirlerine transfer edilebilmektedir. Dolayısıyla temel katsayılı klaster cebirlerinin (Fomin ve Zelevinsky, 2007) mütasyon sınıflarındaki matrislerin lineer cebirsel özelliklerinin araştırılması doğal bir problemdir. Bu kapsamda projede temel katsayılı klaster cebirlerinin mütasyon sınıflarındaki matrisler denklik (congruence) bağıntısı altında sınıflandırılmış ve bunların değişmezlik faktörlerinin (invariant factors) bire eşit olduğu gösterilmiştir. Ayrıca sonlu tipe (Fomin ve Zelevinsky, 2004) sahip olanlar için mod 2 indirgemelerinin Arf değişmezleri hesaplanmıştır. Buna göre belirtilen mütasyon sınıfları için Arf değişmezinin matrislerin graflarındaki döngü (cycle) sayısı ile belirlendiği gösterilmiştir. Bu özellikler belirtilen klaster cebirlerini sınıflandırmak için somut mütasyon-değişmezleri vermektedirler.

Projenin bu kısmında elde edilen sonuçlar “Congruence classes of skew-symmetric matrices for cluster algebras with principal coefficients ” başlıklı bir makale olarak yazılmıştır (Mazı ve Seven, 2016). Makale bu raporun eklerinde bulunabilir; detaylar için makaleye bakınız.

Yayınlar

[9],[11],[12] ve [14] no’lu referanslar (Seven, 2014, 2016; Mazı ve Seven, 2016; Seven ve Velioğlu, 2016) proje kapsamında yazılmış makalelerdir. (Makaleler bu raporun eklerinde bulunmaktadır.)

Sunumlar

Projede elde edilen sonuçlar proje yürütücüsü tarafından aşağıdaki uluslararası konferanslarda sunulmuştur.

1. XXV. Meeting on Representations of Algebras, Sherbrooke, Kanada, Ekim 2013
2. Cluster algebras in representation theory, Seul, Güney Kore, Kasım 2014
3. Cluster algebras in combinatorics and topology, Seul, Güney Kore, Aralık 2014
4. Representation theory seminar, Bonn Üniversitesi, Almanya, Ocak 2014

5. SONUÇ

Projede, matematiğin temel konularından olan klaster cebirlerinin mütasyon sınıflarının temel cebirsel ve kombinatoryal özellikleri ortaya çıkarılmıştır. Bu bağlamda yeni bağıntılar (“generalized Coxeter relations” gibi) ve genel kriterler (on the existence of maximal green sequences) elde edilmiş olup, bu kavram ve metodlarla klaster cebirlerinin bazı temel problemleri çözülmüş ve bu cebirlerin matematiğin diğer temel konuları olan Kac-Moody Lie cebirleri ve matematiksel fizik ile yeni bağlantıları ortaya çıkarılmıştır.

Bilindiği gibi klaster cebirleri arasında en önemli iki sınıfı Kac-Moody Lie cebirlerine karşılık gelen döngüsüz klaster cebirleri ve topolojik yüzeylerin üçgenlemelerine karşılık gelen klaster cebirleridir. Döngüsüz klaster cebirlerini çalışmak için temel bir metod, yürütücü tarafından tanımlanmış olan uyumlu (admissible) Cartan eşlenikleridir. Bu metod projede geliştirilerek kullanılmıştır; elde edilen sonuçlar bu metodun topolojik yüzeylerden gelen döngülü klaster cebirleri için de kullanılabileceğini göstermektedir. Bu çerçevede, topolojik yüzeylerden gelen klaster cebirleri için de kök sistemi nosyonunun tanımlanıp, bu cebirlerdeki temel katsayıları parametrize eden c-vektörlerinin bu kök sistemleri ile bağlantılı özelliklerinin ortaya çıkarılması bu projenin doğal bir devamı olacaktır. Böyle bir çalışmada, projede geliştirilen metodlar çok temel bir rol oynayacaktır.

Projenin sonuçları uluslararası saygın dergilerde yayınlanmış olup ayrıca yine uluslarası konferanslarda sunulmuştur. Sonuç olarak proje başarılı olmuştur.

6. KAYNAKLAR

1. Barot, M. and Marsh, R. 2015, Reflection group presentations arising from cluster algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 367, no. 3, 1945–1967.

2. Cecotti, S., Cordova, C., and Vafa,C. 2013, BPS quivers and spectra of complete N=2 quantum field theories. Comm. Math. Phys. 323, no. 3, 1185–1227.

3. Derksen, H., Weyman J. and Zelevinsky, A. 2010, Quivers with potentials and their representations II: Applications to cluster algebras, J. Amer. Math. Soc. 23, no.3, 749-790.

4. Felikson, A. and Tumarkin, P. 2016, Coxeter groups and their quotients arising from cluster algebras. Int. Math. Res. Not. IMRN (17): 5135-5186.

5. Fomin, S., Shapiro, M. and Thurston, D. 2008, Cluster algebras and triangulated surfaces. Part 1: Cluster complexes, Acta Math. 201, no.1 83-146, (2008).

6. Fomin, S. and Zelevinsky, A. 2002, Cluster Algebras I, J. Amer. Math. Soc. 15 no:2, 497-529.

7. Fomin, S. and Zelevinsky, A. 2003, Cluster Algebras II, Invent. Math. 12, 335-380.

8. Fomin, S. and Zelevinsky, A. 2007, Cluster Algebras IV, Compos. Math. 143 (1) 112–164.

9. Mazı, S. and Seven, A. 2016, Congruence classes of skew-symmetric matrices for cluster algebras with principal coefficients.

10. Seven, A. 2011, Cluster algebras and semipositive symmetrizable matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 363(5), 2733-2762.

11. Seven, A. 2014, Maximal green sequences of exceptional finite mutation type quivers. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 10. Paper 089.

12. Seven, A. 2016, Reflection group relations arising from cluster algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 144, no. 11, 4641-4650.

13. Seven, A. 2015, Cluster algebras and symmetric matrices, Proc.Amer.Math.Soc. (143) no.2 469-478.

14. Seven, A. and Velioğlu, K. 2016, Cluster algebras from triangulations of the torus and symmetric matrices.

15. Speyer, D. and Thomas, H. 2013, Acyclic cluster algebras revisited, Algebras, quivers and representations, 275-298, Abel Symp., 8, Springer, Heidelberg.

EKLER

Proje kapsamında yazılan makaleler (Seven, 2014, 2016; Mazı ve Seven, 2016; Seven ve Velioğlu, 2016).

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Doç. Dr. AHMET İRFAN SEVEN
Proje No:	113F138
Proje Başlığı:	Klaster Cebirlerinin Mütasyon Sınıfları
Proje Türü:	1001 - Araştırma
Proje Süresi:	36
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ORTA DOĞU TEKNİK Ü. FEN EDEBİYAT F. MATEMATİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	15/09/2013 - 15/09/2016
Onaylanan Bütçe:	180410.0
Harcanan Bütçe:	118460.0
Öz:	Klaster cebirleri (cluster algebras) önce matematiğin klasik bir alanı olan temsil teorisinde ortaya çıkmış ve daha sonra varlığı diğer farklı alanlarda da farkedilmiş bir matematiksel yapıdır. Bu projede, klaster cebirlerini belirleyen mütasyon sınıflarının temel cebirsel-kombinatoryal özellikleri ortaya çıkarılmıştır. Bu kapsamda, matematiğin temel objelerinden olan Kac-Moody Lie cebirlerine karşılık gelen klaster cebirleri ile çeşitli sonlu mütasyon tipine sahip klaster cebirleri için mütasyon değişmezleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, bu konular arasında yeni bağlantılar ortaya çıkarmış ve daha iyi anlaşılmalarına katkıda bulunmuştur. Projede elde edilen sonuç ve araçlar klaster cebirleri ile ilgili açık hesaplamalar yapmaya imkan vermektedir. Bu yönüyle proje, klaster cebirleri teorisinde önemli bir boşluğu doldurmuştur. Projede elde edilen sonuçlar dört makale olarak yazılmış ve çeşitli uluslararası bilimsel toplantılarda sunulmuştur.
Anahtar Kelimeler:	Klaster cebiri, mütasyon
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır
Projeden Yapılan Yayınlar:	1- Maximal Green Sequences of Exceptional Finite Mutation Type Quivers (Makale - Diğer Hakemli Makale),